

## Επαναληπτικό διαγώνισμα στις καμπύλες

### Θέμα 1

Έστω καμπύλη  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  μοναδιαίας ταχύτητας με καμπυλότητα  $k(s) > 0$ ,  $\forall s \in I$  και στρέψη  $\tau(s) > 0$ . Θεωρούμε την καμπύλη  $\bar{c}(s) := \int_{s_0}^s b(t)dt$ ,  $s \in I$ , όπου  $b(s)$  το δεύτερο κάθετο διάνυσμα της  $c$ .

- (i) Να αποδείξετε ότι η καμπύλη  $\bar{c}$  είναι κανονική και να βρείτε το πλαίσιο Frenet αυτής.
- (ii) Να βρείτε την καμπυλότητα και τη στρέψη της  $\bar{c}$
- (iii) Να αποδείξετε ότι η  $\bar{c}$  είναι σταθεράς κλίσης αν και μόνο αν η  $c$  είναι σταθεράς κλίσης.
- (iv) Να αποδείξετε ότι οι  $\bar{c}$  και  $c$  είναι γεωμετρικά ισότιμες αν και μόνο αν η  $c$  είναι καμπύλη σταθεράς κλίσης με γωνία  $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$ .

### Θέμα 2

Με πλήρη αιτιολόγηση να απαντήσετε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι αληθείς ή ψευδείς.

- Έστω μία καμπύλη  $c(s)$  του  $\mathbb{R}^2$  με φυσική παράμετρο  $s$  και τέτοια ώστε να έχει μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα

$$\vec{n}(s) = \left( \cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r} \right).$$

Η καμπυλότητα  $k(s)$  της  $c$  είναι  $k(s) = 1/r$ .

- Δεν πάρεχει καμπύλη με καμπυλότητα ίση με  $-3$ .
- Ένας κύκλος με φυσική παραμέτρηση, είναι η μοναδική καμπύλη στο επίπεδο με σταθερή και μη μηδενική καμπυλότητα.
- Το κύριο κάθετο διάνυσμα μιας καμπύλης με φυσική παράμετρο  $s$  στο επίπεδο παραμένει ίδιο αν αναπαραμετρίσουμε την καμπύλη με  $\bar{s} = -s$ .

### Θέμα 3

Δίνεται μια κανονική καμπύλη  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  με μοναδιαία ταχύτητα και καμπυλότητα  $k(s) > 0$ ,  $s \in I$  και πλαίσιο Frenet  $\{t, n, b\}$ . Αν  $\langle c(s), b(s) \rangle = 0$ ,  $\forall s \in I$ , αποδείξτε ότι η καμπύλη  $c$  είναι επίπεδη.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**